

绵阳市高中 2018 级第三次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

BDBDC DACAB AA

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 0

14. $2e$

15. $\sqrt{2}$

16. ①③④

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分.

17. 解：（1）由 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ ，得 $2ab\sin C = 2ab\cos C$ ，

$$\therefore \tan C = 1.$$

$$\because 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

（2）由 $c^2 = 2ab\cos C$ 及正弦定理得，

$$\sin^2 C = 2\sin A \sin B \cos C, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \frac{2 \cos C}{\sin C}.$$

$$\because A + B = \pi - C,$$

$$\therefore \sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{2 \cos C}{\sin C} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\sin A \sin B},$$

$$\therefore \frac{2}{\tan C} = \frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解：（1）由图知：高二年级的学生成绩的平均分高于高一年级考核成绩的平均分；高二年级的学生成绩比较集中，而高一级的同学成绩比较分散.

$\therefore$ 高二年级的学生学习效果更好. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

（2）记事件 A 为“从样本中任取 2 名同学的竞赛成绩为优秀”，事件 B 为

“这两个同学来自同一个年级”，则 $P(A) = \frac{C_{11}^2}{C_{40}^2}$ ， $P(AB) = \frac{C_5^2 + C_6^2}{C_{40}^2}$.

$\therefore$ 在成绩为优秀的情况下，这 2 个同学来自同一个年级的概率为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{C_5^2 + C_6^2}{C_{11}^2} = \frac{5}{11}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(3) 由题意 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}, \quad P(X=1) = \frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}, \quad P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}.$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$\therefore X$ 的分布列为:11 分

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{30} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{5}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 证明: $\because DE \perp$ 平面 ABE , $AB \subset$ 平面 ABE , $\therefore DE \perp AB$.

又 $AB \perp DA$, 且 $DE \cap DA = D$,

$\therefore AB \perp$ 平面 ADE4 分

又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

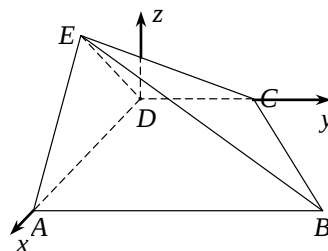
$\therefore$ 平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$5 分

(2) 建立如图所示空间直角坐标系 $D-xyz$.

$\because DE \perp$ 平面 ABE , $AE \subset$ 平面 ABE ,

$\therefore DE \perp AE$.

$\because AD=2$, $DE=1$, $\therefore E(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$,



由题意得 $B(2, 2, 0)$, $C(0, 1, 0)$7 分

设平面 BCE 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BC} = 0, \\ \vec{m} \cdot \vec{EC} = 0, \end{cases} \quad \text{得 } \begin{cases} -2x - y = 0, \\ -\frac{1}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \end{cases}$$

取 $x=1$, 得 $y=-2$, $z=-\frac{5}{\sqrt{3}}$,

$\therefore \vec{m} = (1, -2, -\frac{5}{\sqrt{3}})$9 分

取平面 BCD 的一个法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = -\frac{\sqrt{10}}{4}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$\because$ 二面角 $D-BC-E$ 所成角为锐角,

$\therefore$ 二面角 $D-BC-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$12 分

20. 解: (1) 设 $F(c, 0)$. 由题意得 $|FA|=a, |FB|=a+c, \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}, a^2=b^2+c^2,$

$$\therefore |FA| \cdot |FB| = a(a+c) = 10 + 5\sqrt{2}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

解得 $a^2=10, b^2=5$.

$$\therefore \text{椭圆的方程为 } \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 设 $P(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CM}, \quad \overrightarrow{DP} = \mu \overrightarrow{DN},$$

$$\text{得 } (x_0+4, y_0) = \lambda(x_1+4, y_1), \quad (x_0-4, y_0) = \mu(x_2-4, y_2),$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 - \lambda x_1 = 4(\lambda - 1), \\ y_0 = \lambda y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 - \mu x_2 = 4(1 - \mu), \\ y_0 = \mu y_2, \end{cases}$$

$$\therefore \lambda x_1 - \mu x_2 = 8 - 4(\lambda + \mu). \quad \text{①} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

又点 P, M, N 均在椭圆上,

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x_0^2}{10} + \frac{y_0^2}{5} = 1, \\ \frac{\lambda^2 x_1^2}{10} + \frac{\lambda^2 y_1^2}{5} = \lambda^2, \end{cases} \quad \text{得 } \frac{(x_0 - \lambda x_1)(x_0 + \lambda x_1)}{10} = 1 - \lambda^2,$$

$$\therefore x_0 + \lambda x_1 = -\frac{5}{2}(\lambda + 1). \quad \text{②} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x_0^2}{10} + \frac{y_0^2}{5} = 1, \\ \frac{\mu^2 x_2^2}{10} + \frac{\mu^2 y_2^2}{5} = \mu^2, \end{cases} \quad \text{得 } x_0 + \mu x_2 = \frac{5}{2}(\mu + 1). \quad \text{③} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{联立②③得 } \lambda x_1 - \mu x_2 = -\frac{5}{2}(\lambda + \mu) - 5. \quad \text{④} \quad \text{联立①④得 } \lambda + \mu = \frac{26}{3},$$

$$\therefore \lambda + \mu \text{ 为定值 } \frac{26}{3}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=e^x - \ln(x-1)+1(x>1)$, 即 $f'(x)=e^x - \frac{1}{x-1}$,

易知 $f'(x)=e^x - \frac{1}{x-1}$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

又 $f'(\frac{5}{4}) < 0, f'(2)=e^2 - 1 > 0$, 存在唯一 $x_0 \in (\frac{5}{4}, 2)$, 使得 $f'(x_0)=0$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

当 $x \in (1, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 有唯一极值点 x_0 . $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) $\because f'(x) = ae^x - \frac{1}{x-1}$, 由题意得 $a > 0$,

易知 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x-1}$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

$\therefore$ 存在唯一 x_0 , 使 $f'(x_0) = ae^{x_0} - \frac{1}{x_0-1} = 0$,

即 $ae^{x_0} = \frac{1}{x_0-1}$, $\ln a + x_0 = -\ln(x_0-1)$.

$\therefore f_{\min}(x) = f(x_0) = ae^{x_0} - \ln(x_0-1) + \ln a + 1 \geq 0$,9 分

即 $\frac{1}{x_0-1} - \ln(x_0-1) - \ln(x_0-1) - x_0 + 1 \geq 0$,

即 $\frac{1}{x_0-1} - 2\ln(x_0-1) - x_0 + 1 \geq 0$,

令 $t = x_0 - 1$, 则 $\frac{1}{t} - 2\ln t - t \geq 0$10 分

设 $h(t) = \frac{1}{t} - 2\ln t - t (t > 0)$.

$\because h'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} - 1 < 0$,

$\therefore h(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 递减,

又 $h(1) = 0$, $\therefore h(t) \geq h(1)$, $0 < t \leq 1$,

$\therefore \ln a = -\ln t - t - 1 \geq -2$,

$\therefore a \geq \frac{1}{e^2}$12 分

22. 解: (1) 由 $\begin{cases} x = \sqrt{10} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{10} \sin \alpha + 4, \end{cases}$ 得 $x^2 + (y-4)^2 = 10$2 分

由 $\begin{cases} y = \rho \sin \theta, \\ x = \rho \cos \theta, \end{cases}$ 得曲线 E 的极坐标方程为 $\rho^2 - 8\rho \sin \theta + 6 = 0$4 分

直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \beta (\rho \in \mathbf{R}, 0 \leq \beta < \pi)$5 分

(2) 将直线 $l: \theta = \beta (\rho \in \mathbf{R}, 0 \leq \beta < \pi)$,

代入曲线 E 的方程得 $\rho^2 - 8\rho \sin \beta + 6 = 0$.

由 $\Delta = 64 \sin^2 \beta - 24 > 0$, 解得 $\sin^2 \beta > \frac{3}{8}$.

设 $N(\rho_2, \beta), M(\rho_1, \beta)$.

由韦达定理得 $\rho_1 + \rho_2 = 8\sin\beta$, $\rho_1\rho_2 = 6$7分

$$\because \overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OM},$$

$$\therefore \rho_2 = 3\rho_1,$$

解得 $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 满足 $\Delta > 0$.

$$\because 0 \leq \beta < \pi, \therefore \beta = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4},$$

$$\therefore k = \tan\beta = \pm 1.$$

$\therefore$ 直线 l 的斜率为 ± 110分

23. 解: (1) 当 $x \geq 1$ 时, $4x - 3 \geq 4$, 解得 $x \geq \frac{7}{4}$;2分

当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $1 \geq 4$ 不成立;

当 $x \leq \frac{1}{2}$ 时, $3 - 4x \geq 4$, 解得 $x \leq -\frac{1}{4}$4分

综上, 不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{7}{4}, +\infty)$5分

(2) 由题意得 $2f(x) - g(x) = 4|x-1| - |x+1|$,

当 $x=0$ 时, $3 \geq 0$, 显然成立.

要使 $2f(x) - g(x) \geq a|x|$ 成立, 即 $a \leq \frac{2f(x) - g(x)}{|x|} (x \neq 0)$,

$$\text{令 } h(x) = \frac{2f(x) - g(x)}{|x|} (x \neq 0),$$

$$\text{即 } h(x) = \frac{4|x-1| - |1+x|}{|x|} = 4\left|1 - \frac{1}{x}\right| - \left|\frac{1}{x} + 1\right| \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\geq \left|1 - \frac{1}{x}\right| - \left|\frac{1}{x} + 1\right| \quad (\text{当且仅当 } x=1 \text{ 时取得等号})$$

$$\geq -\left|1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 1\right| = -2 \quad (\text{当且仅当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时取得等号}).$$

$\therefore$ 当 $x=1$ 时函数 $h(x)$ 取得最小值 -2 .

$$\therefore a \leq -2.$$

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -2]$10分